

Estudio de una conjetura en topología digital

Luis Ernesto Carrera Retana

14 de abril de 2009

Resumen

La conjetura de Jordan es un problema abierto en matemática, sobre si es posible encontrar un cuadrado en cualquier curva cerrada. Un estudiante de doctorado presentó en ACCOTA (Aspectos Combinatorios y Computacionales de Optimización, Topología y Álgebra) 2006, un pregunta abierta sobre su interés en un problema similar a este para el caso de topología digital.

En este trabajo se presenta primero el problema de topología digital, y se muestra que en este caso la conjetura es cierta, tomando como base una demostración por Stromquist, quien demuestra que es cierto para cierta clase de curvas compuestas por funciones a trozos.

Además, como parte de la implementación del algoritmo que resolvía el problema, se investigó un problema general de optimización que resolviera de manera más eficiente la búsqueda en la curva topológica digital. Dicha búsqueda llevó al estudio de una interpretación discreta de la optimización de lipschitz para el caso bidimensional.

Abstract

The Jordan conjecture is an open problem in mathematics, about if it's possible to find a square in any closed curve. A PhD. student presented an open question in ACCOTA (Combinatorial Aspects about Optimization, Topology and Algebra) 2006, about his interest in a similar problem for the digital topological case.

In this work we present first the problem presented, and we show that the conjecture is true in this case, taking as base a demonstration given by Stromquist for some class of curves wich consists of a composition of trace functions.

Also, as part of the investigation for an algorithm that solves the problem, we search for a general optimization technique that could be used to solve the problem in a more efficient way. As a result, que develop a discrete interpretation of the lipschitz optimization for the bidimensional case.

1. Introducción

1.1. Antecedentes

El problema del cuadrado inscrito en una curva fue presentado por Toeplitz in 1911, pero todavía no ha sido posible demostrar su validez para todos los casos. Muchos casos se han demostrado hasta ahora. Un estudiante de doctorado pensó que era posible resolver el problema analizando el caso del mismo problema desde el punto de vista de la topología digital.

El Dr. Feliú Sagols Troncoso, quien fuera mi asesor en la tesis de maestría que realicé en el Cinvestav, consideró que sería un problema interesante de estudiar, por lo que me propuso que nos dedicáramos a su estudio.

El programa era revisar la literatura existente sobre el problema, y comenzar a trabajar desde el punto de vista de la topología digital, un área que ha tomado mucha fuerza por su aplicación en el manejo de imágenes digitales.

1.2. Definición del problema

Se denotará por I^2 al conjunto de todos los pares (i, j) de enteros, los cuales se pueden considerar puntos en el plano.

Se dice que el par $(h, k) \in I^2$ es un *4-vecino* del par $(i, j) \in I^2$ si se cumple que:

$$|i - h| + |j - k| = 1.$$

En la Figura 1 se muestran los cuatro vecinos de un par $(i, j) \in I^2$. Se denotará por $C_{(i,j)}$ el conjunto de los cuatro vecinos de (i, j) .

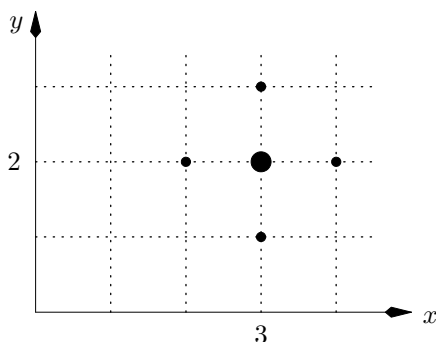


Figura 1: El conjunto de 4-vecinos del punto $(3,2)$ está dado por $C_{(3,2)} = \{(2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 3)\}$.

Sea $A = (x_1, x_2, \dots, x_t)$ (donde por brevedad se ha representado $(i_k, j_k) \in I^2$ por x_k), donde $t \geq 1$. Se dice que A es un *4-camino* si por cada r , donde $1 \leq r < t$, se tiene que $x_{r+1} \in C_{x_r}$.

El ejemplo de un 4-camino se muestra en la Figura 2.

Se define un *4-camino simple cerrado*, a un 4-camino $A = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ que además cumpla con las siguientes condiciones:

1. $n \geq 4$
2. $x_r = x_s$ solamente si $r = s$, y
3. $x_r \in C_{x_s}$ si y solamente si $r \equiv s \pm 1$ módulo $n + 1$

[El “solamente si” de (ii) dice que A nunca se cruza consigo mismo, mientras que el “solamente si” de (iii) dice que ni siquiera ‘se roza’ a sí mismo; el “si” de (iii) dice que A es un 4-camino y que x_n es un 4-vecino de x_0 (para que así A sea “cerrado”). El requisito de que $n \geq 4$ excluye los casos (a) $n = 0$; (b) $n = 1$, $(i_1, j_1) = (i_0 \pm 1, j_0)$ o $(i_1, j_1) = (i_0, j_0 \pm 1)$; (c) $n=3$, x_0, x_1, x_2 y x_3 forman un cuadrado 1×1 .]

En la Figura 3 se muestra un 4-camino simple cerrado, mientras que en la Figura 4 se muestra un 4-camino que no cumple con la condición (iii) para ser un 4-camino simple cerrado.

Conjetura: En todo 4-camino simple cerrado A , existen 4 puntos que corresponden a los vértices de un cuadrado.

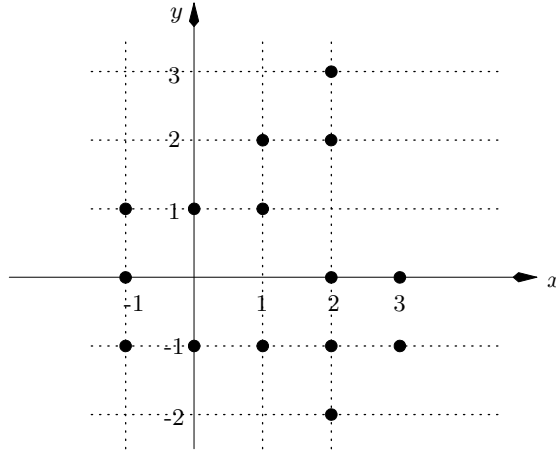


Figura 2: Representación gráfica del 4-camino $A = ((2,3), (2,2), (1,2), (1,1), (0,1), (-1,1), (-1,0), (-1,-1), (0,-1), (1,-1), (2,-1), (2,0), (3,0), (3,-1), (2,-1), (2,-2))$.

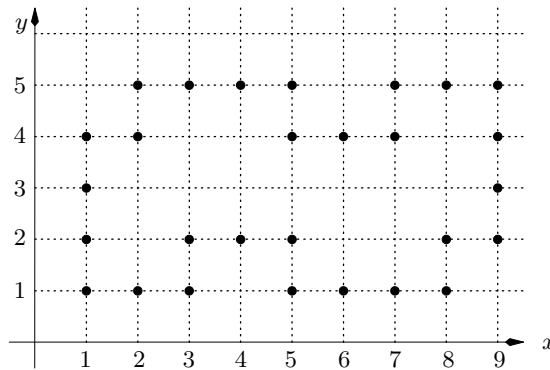


Figura 3: 4-camino simple cerrado $A = ((1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,4), (2,5), (3,5), (4,5), (5,5), (5,4), (6,4), (7,4), (7,5), (8,5), (9,5), (9,4), (9,3), (9,2), (8,2), (8,1), (7,1), (6,1), (5,1), (5,2), (4,2), (3,2), (3,1), (2,1))$.

Nota: Con la definición anterior de 4-camino simple cerrado, la condición (iii) excluye los casos en los cuales se forman cuadrados de 1×1 o casos en que se podría partir el 4-camino simple cerrado en dos 4-caminos simples cerrados más pequeños. En los casos para $n = 0$ y $n = 1$ no se pueden construir cuadrados, mientras que en el caso $n = 3$ es trivial.

1.3. Objetivos

1. Demostrar la veracidad de la conjetura.
2. Definir una interpretación discreta para la técnica de optimización de Lipschitz, que permita en un futuro aplicar dicha técnica para resolver de manera más eficiente encontrar cuadrados en 4-caminos.

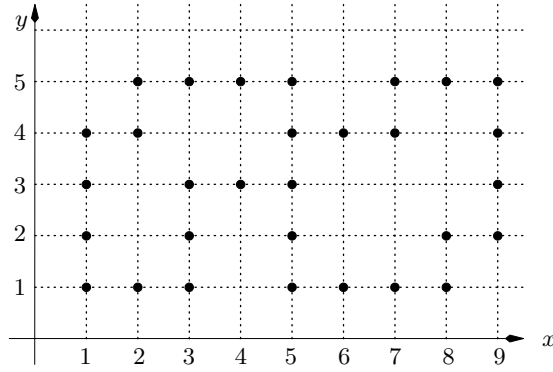


Figura 4: 4-camino que no cumple la condición 3 para ser un 4-camino simple cerrado $A=((1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,4), (2,5), (3,5), (4,5), (5,5), (5,4), (6,4), (7,4), (7,5), (8,5), (9,5), (9,4), (9,3), (9,2), (8,2), (8,1), (7,1), (6,1), (5,1), (5,2), (5,3), (4,3), (3,3), (3,2), (3,1), (2,1))$, ya que los puntos no adyacentes en la lista $(5,4)$ y $(5,3)$ son 4-vecinos.

2. Revisión de literatura

Debido a que la primera parte se dedicó a la implementación de una plataforma computacional para el estudio del problema, se estudian diversas técnicas de representación para el problema a utilizar, y estructuras de datos que permitan tanto manejar la información de manera eficiente, como resolver el problema de encontrar soluciones al problema para casos específicos.

Luego la revisión de literatura se dirigió en dos sentidos: por una parte, en estudiar lenguajes computacionales, principalmente los lenguajes regulares y los lenguajes libres de contexto, que permitieran describir el problema desde dicha perspectiva. Por otro lado revisar literatura sobre trabajos en la dirección de resolver el problema original.

En esta última dirección, uno de los resultados más recientes e importantes se debe a Stromquist [6], quien muestra que para cada curva suave en \mathbf{R}^n , existe un cuadrado cuyos vértices se encuentran sobre la curva. Pero además generaliza dicho resultado, demostrando que, para la existencia de un cuadrado inscrito en una curva plana, es suficiente con que la curva sea convexa o un polígono, caso particular este último que demuestra Pak [5], aunque no se encontró una demostración para el caso particular en el que estábamos trabajando.

Además se quería trabajar en un algoritmo que encontrara los puntos en una de dichas curvas de manera eficiente. Así que nos dedicamos a buscar información sobre diferentes técnicas de optimización combinatorias: *branch and bound*, generación de columnas, etc. Se estudia por otra parte la optimización de lipschitz, y se muestra una técnica que utiliza una técnica utilizada para funciones continuas, para el caso discreto.

3. Resultados

3.1. Demostración de la conjetura

Se define una estructura de datos que almacene dos tipos de información distintas: la región del interior del 4-camino, y los puntos de la cuadrícula pertenecientes al 4-camino mediante vectores binarios. Se utiliza de manera inicial un algoritmo de enumeración completa para buscar cuadrados

inscritos en el 4-camino.

Se comienza la construcción de una gramática para el problema, analizando inicialmente casos sencillos, de manera que fuera posible luego generalizar una conclusión.

Por otro lado, en una curva topológica, debido a que se trata de una función a trozos, ya estaría demostrado [6][5] que existen cuatro puntos *sobre la curva* que satisfacen la condición. Lo que falta por mostrar es que existen cuatro puntos pertenecientes al 4-camino que cumplen la propiedad.

Si los 4 puntos se encuentran sobre el 4-camino que define la curva, el problema ya está resuelto. Vamos a comenzar con la demostración de que dado que al menos un punto pertenezca al 4-camino, entonces los 4 puntos pertenecen al 4-camino.

Se comienza con tres puntos sobre el 4-camino. Sean p_1, p_2, p_3 y p_4 los cuatro puntos consecutivos (es decir, los lados del cuadrado son los segmentos p_1p_2, p_2p_3, p_3p_4 y p_4p_1) que forman el cuadrilátero, de manera que tengan coordenadas (i_k, j_k) para $k = 1, 2, 3, 4$ respectivamente. Sin pérdida de generalidad, sean los puntos $(i_1, j_1), (i_2, j_2)$ e (i_3, j_3) de coordenadas enteras. Así, y dado que $|i_1 - i_2| = |i_3 - i_4|$ y que $|j_1 - j_2| = |j_3 - j_4|$, las coordenadas del punto p_4 son también enteras, por lo que pertenecen al 4-camino.

Para el resto de los casos, denominemos por h_k un punto que se encuentra en un segmento de línea horizontal definido por los puntos del cuatro camino $(i_k, j_k)(i_k + 1, j_k)$, y por v_k un punto que se encuentra en un segmento de línea vertical definido por los puntos (i_k, j_k) e $(i_k, j_k + 1)$.

Sean p_1, p_2 puntos en el 4-camino. Sin pérdida de generalidad sea $h_3 = (x_3, j_3)$ con j_3 entero. Dado que $|i_2 - x_3| = |j_1 - j_2|$, entonces x_3 es entero, y por lo tanto los 4 puntos pertenecen al 4-camino.

Sean p_1 y p_3 puntos en el 4-camino. Sin pérdida de generalidad sea $h_2 = (x_2, j_2)$ con j_2 entero. Igual que el anterior, dado que $|x_2 - i_3| = |j_1 - j_2|$, entonces x_2 es entero, y por lo tanto los 4 puntos pertenecen al 4-camino.

Sea p_1 en el 4-camino. Entonces, de los otros 3 puntos al menos dos deben estar en segmentos horizontales o verticales. En caso de que en segmentos horizontales se encuentren $h_2 = (x_2, j_2)$ y $h_4 = (x_4, j_4)$, como $|j_1 - j_4| = |x_2 - i_1|$, el punto dos tiene coordenadas enteras.

Si los puntos en segmentos horizontales son $h_2 = (x_2, j_2)$ y $h_3 = (x_3, j_3)$ entonces $|i_1 - x_2| = |j_2 - j_3|$, por lo que el punto h_2 se encuentra en el 4-camino.

Los demás casos son similares.

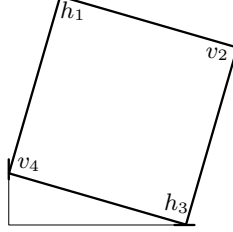
Falta analizar entonces los casos para cuando no se puede afirmar que ninguno de los 4 puntos se encuentren en el 4-camino.

Las posibilidades para la posición de los cuatro puntos están entonces dadas por $h_1h_2h_3h_4, h_1h_2h_3v_4, h_1h_2v_3v_4, h_1v_2h_3v_4$ o permutaciones de los mismos casos anteriores, o casos en los cuales se intercambian h por v si rotamos la figura 90 grados.

1. $h_1h_2h_3h_4$: Sean $h_k = (x_k, j_k)$ con j_k entero para $k = 1, 2, 3, 4$. Dado que $|x_1 - x_2| = |x_3 - x_4| = |j_1 - j_3|$ y todos los puntos están sobre segmentos horizontales, entonces los puntos del cuatro camino $(i_1, j_1), (i_2, j_2), (i_3, j_3)$ e (i_4, j_4) también corresponden a las coordenadas de un cuadrado.
2. $h_1h_2h_3v_4$: Sean $h_k = (x_k, j_k)$ con j_k entero para $k = 1, 2, 3$ y $v_4 = (i_4, y_4)$ con i_4 entero. Entonces, como $|j_1 - y_4| = |j_2 - j_3|$, y_4 es entero y por lo tanto los 4 puntos pertenecen al 4-camino.
3. $h_1h_2v_3v_4$: Sean $h_k = (x_k, j_k)$ con j_k entero para $k = 1, 2$ y $v_l = (i_l, y_l)$ con i_l entero para

$l = 3, 4$. Entonces, como $|j_1 - y_4| = |i_3 - i_4|$, y_4 es entero y por lo tanto los 4 puntos pertenecen al 4-camino.

4. $h_1v_2h_3v_4$: Sean $h_k = (x_k, j_k)$ con j_k entero para $k = 1, 3$ y $v_l = (i_l, y_l)$ con i_l entero para $l = 2, 4$. Sin pérdida de generalidad se puede pensar en el siguiente caso:



La idea es que es posible “rotar” el cuadrado hacia alguna dirección, y va a caer en cuatro puntos del 4-camino. Dado que en el punto $h_1 = (x_1, j_1)$, $i_1 < x_1 < i_1 + 1$, podemos expresar dicho punto como $h_1 = (i_1 + \delta_1, j_1)$, con $0 < \delta_1 < 1$. Vamos a rotar el cuadrado en dirección de las manecillas del reloj, así queremos demostrar que los puntos $(i_1 + 1, j_1)$, $(i_2, j_2 + 1)$, (i_3, j_3) , (i_4, j_4) forman un cuadrado. Para ello basta mostrar que los triángulos rectángulos que se forman en dicha figura son congruentes. Así, solamente se va a mostrar que $|j_1 - (j_2 + 1)| = |j_4 - j_3|$.

Observe que (en este caso en particular) $j_1 - (j_2 + \delta_2) = j_4 + \delta_4 - j_3$. Ahora sea $\delta'_2 = 1 - \delta_2$, así $j_1 - j_2 - 1 + \delta'_2 = j_4 + \delta_4 - j_3$. Dado que $j_4 - j_3$ y $j_1 - j_2 - 1$ son números enteros, entonces debe cumplirse que $\delta'_2 = \delta_4$, por lo tanto $|j_4 - j_3| = |j_1 - (j_2 + 1)|$. Los demás casos se desarrollan de manera similar.

3.2. Aplicación de la optimización Lipschitz en problemas de optimización discreta

Una función continua univariada f se dice que es:

1. *Lipschitz por la izquierda* si existe una constante positiva L tal que

$$f(x) - f(y) = L(y - x) \text{ para todo } x, y \in \text{Dom}(f), \text{ tal que } y > x.$$

2. *Lipschitz por la derecha* si $-f$ es Lipschitz por la izquierda.
3. *Lipschitz lateral* si f es de Lipschitz por la izquierda o por la derecha.

Una función que es simultáneamente Lipschitz por la izquierda y por la derecha es una *función de Lipschitz*, tomando como constante L el máximo de las constantes para el caso izquierdo y derecho.

Se asumirá que $\text{Dom}(f) = [\alpha, \beta]$ donde α, β son números reales con $\alpha < \beta$. Lo que se desea encontrar es:

$$f^* := f(x^*) = \text{mín}\{f(x) \mid x \in [\alpha, \beta]\}.$$

Como se demuestra en [4], no es posible encontrar f^* en un número finito de evaluaciones, así que lo que se quiere encontrar es:

$$f_\epsilon^* := f(x_\epsilon^*) \leq f^* + \epsilon \text{ para } \epsilon > 0.$$

En [4] se muestran dos algoritmos para encontrar f_ϵ^* en funciones de Lipschitz, sin embargo estamos interesados en el algoritmo de Evtushenko ([2]).

Consideremos el problema de encontrar f_ϵ^* en una función de Lipschitz por la izquierda. Sea x^k el último punto evaluado y sea f_ϵ el mínimo valor de f que se conoce hasta ahora. Se desea determinar x^{k+1} de tal manera que $x^{k+1} - x^k$ sea máximo bajo la condición de que para todo $x \in [x^k, x^{k+1})$, $f(x) > f_\epsilon - \epsilon$. La función:

$$f_k(x) := f(x^k) - L(x - x^k)$$

es una cota inferior para $f(x)$ para $x \in [x^k, \beta]$. Así el valor de x^{k+1} corresponde a la intersección de $f_k(x)$ con la recta horizontal $h(x) = f_\epsilon - \epsilon$. Igualando ambas se obtiene:

$$x^{k+1} = x^k + \frac{1}{L}(\epsilon + f(x^k) - f_\epsilon).$$

Así, el algoritmo para resolver el problema para una función de Lipschitz izquierda está dado por:

Entrada: Una función de Lipschitz izquierda $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbf{R}$ con constante L , los números reales α, β y un número real positivo ϵ .

Salida: $(x_\epsilon^*, f_\epsilon^*)$

Inicialización: $x_1 \leftarrow \alpha$, $k \leftarrow 1$, $x_\epsilon \leftarrow x_1$, $f_\epsilon \leftarrow f(x_\epsilon)$

Paso $k = 1, 2, \dots$

si $x^k > \beta$:

devolver (x_ϵ, f_ϵ)

sino:

$$x^{k+1} \leftarrow x^k + (\epsilon + f(x^k) - f_\epsilon)/L$$

si $f(x^{k+1}) < f_\epsilon$:

$$x_\epsilon \leftarrow x^{k+1}, f_\epsilon = f(x^{k+1})$$

$k \leftarrow k + 1$.

Ahora supongamos que tenemos una función discreta definida por la tupla $(\alpha, N, L, \epsilon, f)$ donde $\alpha, L > 0$ y $\epsilon > 0$ son números reales, $N > 0$ es un número natural y f es una función discreta:

$$f : \{\alpha + i\epsilon/L \mid 0 \leq i \leq N\} \rightarrow \{f(\alpha) + j\epsilon \mid j \in \mathbf{Z}\},$$

tal que cumple con alguna de las condiciones laterales de Lipschitz. Dado que el algoritmo no depende de la condición de continuidad de la función, es posible aplicar dicho algoritmo para resolver el problema de encontrar el mínimo de manera óptima.

4. Conclusiones y recomendaciones

La conjetura de Jordan para el caso de un 4-camino se resolvió de manera satisfactoria. Además, se creó una estructura de optimización que podría permitir encontrar un cuadrado en 4-caminos de manera más eficiente.

Sin embargo, la técnica presentada solamente sirve para funciones univariadas, por lo que sería interesante poder generalizar dicha técnica a funciones discretas en varias variables.

Será también importante comparar dicha técnica con otras técnicas actuales de optimización combinatoria para algunos problemas.

Referencias

- [1] Emch A.; *Some Properties of Closed Convex Curves in a Plane*; American Journal of Mathematics, Vol. 35, No. 4 (Oct., 1913), pp. 407–412.
- [2] Evtushenko Y.G.; *Numerical Methods for Finding the Global Extremum of a Function*. USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics, **11** (1971), pp. 38–54.
- [3] Guggenheimer, H.; *Finite sets on curves and surfaces*, Israel J. Math. **3** (1965), pp. 104–112.
- [4] Horst R, Tuy H. *Global Optimization: Deterministic Approaches* 3 ed. Springer, 1996.
- [5] Pak I.; *The discrete square peg problem*, en <http://arxiv.org/abs/0804.0657v1>.
- [6] Stromquist W.; *Inscribed squares and square-like quadrilaterals in closed curves*, Mathematika **36** (1989), pp. 187—197.